Материалы для проведения муниципального этапа Всероссийской математической олимпиады школьников 2013-2014 учебный год.

Уфа-2013г.

Сборник содержит материалы для проведения муниципального этапа Всероссийской математической олимпиады школьников 2013-2014 учебный год.

Сборник составили:

Р.Г. Женодаров, К.П. Исаев, В.И. Луценко, К.В. Трунов

Редакционный совет:

М.Р. Юмалина

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

5 класс

1. Малышу 1 января 2013 года подарили мешок шоколадных конфет, в котором было 300 конфет. Каждый день Малыш съедал одну конфету. По воскресениям к нему прилетал Карлсон, и Малыш угощал его парой конфет. Сколько конфет съел Карлсон? (1 января 2013 года - вторник).

2. Петя может в числе 1974835 переставлять местами любые две цифры различной чётности. Какое наибольшее число он может получить таким образом?

3. Про четырёхзначное число сделано три высказывания: "В записи числа встречаются цифры 1, 4, и 5", "В записи числа встречаются цифры 1, 5, и 9", "В записи числа встречаются цифры 7, 8, и 9". Из них ровно два верных. Какие цифры встречаются в записи этого числа?

4. На столе стоят четыре стопки одинаковых монет из 5 монет, 6 монет, 7 монет и 19 монет. В одной из них одну монету заменили на монету другого веса, внешне не отличающуюся от остальных. Как при помощи чашечных весов без гирь за одно взвешивание найти две стопки, в которых все монеты настоящие?

5. Квадрат 5×5 хотят разрезать на прямоугольники двух видов: 1×4 и 1×3. Сколько прямоугольников может получиться после разрезания? Ответ обосновать.

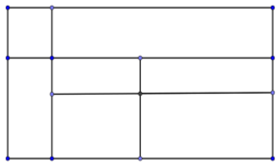
Составитель всех задач 5 класса Р.Г. Женодаров

6 класс

1. В классе 25 учеников. Выше Вовы 14 учеников. Ниже Миши 13 учеников. Все ученики в классе разного роста. Сколько учеников выше Вовы и ниже Миши?

2. Вова сложил несколько последовательных натуральных чисел, начиная с 10. Миша сложил столько же последовательных натуральных чисел, начиная с 11. Сумма Миши оказалась на 100 больше суммы Вовы. Сколько чисел сложил каждый из них?

3. Планировка прямоугольных участков садового кооператива показана на рисунке. У хозяина каждого участка можно узнать периметр его участка. Какое наименьшее количество хозяев нужно опросить, чтобы узнать внешний периметр всего садового кооператива?



4. На столе стоят четыре стопки одинаковых монет из 15 монет, 16 монет, 17 монет и 19 монет. В одной из них одну монету заменили на монету другого веса, внешне не отличающуюся от остальных. Как при помощи чашечных весов без гирь за одно взвешивание найти две стопки, в которых все монеты настоящие?

5. На доске выписаны 10 последовательных натуральных чисел. Сумма всех выписанных цифр равна 56. Сколько могло быть выписано единиц? Указать все возможные ответы.

Составитель всех задач 6 класса Р.Г. Женодаров

7 класс

1. Чтобы открыть сейф, нужно ввести код – число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем троек, а код делится на 12. Придумайте код, открывающий сейф.

2. Найдите величину угла между часовой и минутной стрелками в 20 часов 14 минут 1 января 2014 года.

3. Таблицу 3×3 заполнили простыми числами. Оказалось, что сумма чисел в любых двух соседних клетках – простое число. Какое наибольшее количество различных чисел может быть в таблице? Приведите пример и докажите, что больше различных чисел быть не может.

4. На доске выписано в ряд шесть чисел. Известно, что каждое число, начиная с третьего, равно произведению двух предыдущих, и пятое число равно 108. Найти произведение всех шести чисел в этом ряду.

5. На 300 карточках написаны все натуральные числа от 1 до 300. Карточки поровну раздали двум игрокам. Каждый их них выкладывает такие пары карточек, разность чисел на которых кратна 25, до тех пор, пока это возможно. Докажите, что они выложат на стол одинаковое количество таких пар карточек.

Составитель всех задач 7 класса Р.Г. Женодаров

8 класс

1. Имеются двухчашечные весы и девять гирь весом 1г, 2г, 3г ..., 9г. Можно ли с их помощью отвесить 27 г песка за одно взвешивание, причём так, чтобы все гири были использованы?

2. Даны двузначное, трехзначное и четырехзначное числа, все девять цифр в записи которых различны. Может ли сумма этих чисел равняться 2013?

3. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все стороны равны. Оказалось, что $\angle A=\angle C=\angle E=150°$. Найти величину угла B.

4. Пусть a, b, c, d – различные целые числа, такие что

$$(8-a)(8-b)(8-c)(8-d)=9.$$

Найти сумму $a+b+c+d$.

5. На 500 карточках написаны все натуральные числа от 1 до 500. Карточки поровну раздали двум игрокам. Каждый их них выкладывает такие пары карточек, разность чисел на которых кратна 25, до тех пор, пока это возможно. Докажите, что они выложат на стол одинаковое количество таких пар карточек.

Составитель всех задач 8 класса Р.Г. Женодаров

9 класс

1. Было 2013 пустых коробок. В некоторую из них положили 13 новых коробок (не вложенных друг в друга). Таким образом, стало 2026 коробок. В некоторую из них снова положили 13 новых коробок (не вложенных друг в друга) и т.д. После нескольких таких операций стало 2013 непустых коробок. Сколько всего стало коробок?

2. Докажите, что неравенство $x^2 - 2x\sqrt{y-5} + y^2 + y - 30 \geq 0$ выполняется при любых допустимых значениях x и y.

3. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

$$x^2(y + y^2) = y^3 + x^4.$$

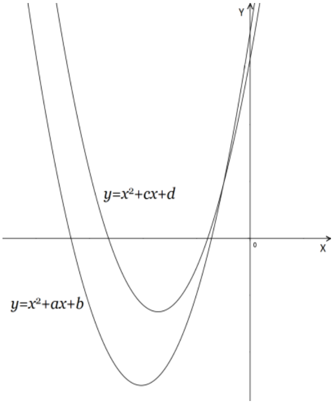
4. Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны соответственно 15 и 12, а основание LM=3. Биссектриса угла NKL проходит через середину стороны MN. Найдите площадь трапеции.

5. В клетках таблицы с 10 строками и 10 столбцами стоят числа +1 и -1. Берутся произведения чисел, стоящих в каждом столбце и в каждой строке. Докажите, что сумма этих 20 произведений не может равняться двум.

Составитель всех задач 10 класса К.П. Исаев

10 класс

1. Доказать, что в последовательности 2014, 20142014, 201420142014, ... нет такого числа, которое является квадратом целого числа.



2. Сравните числа $\sqrt[2013]{2013!}$ и $\sqrt[2014]{2014!}$.

3. На рисунке изображены графики квадратных трёхчленов
$y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$.
Докажите, что $a^2 - c^2 > b - d$.

4. Решите неравенство в целых числах

$$\frac{x^2}{\sqrt{x-3y+2}} + \frac{y^2}{\sqrt{-x+2y+1}} \geq y^2 + 2x^2 - 2x - 1.$$

5. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C$ – прямой) на стороне BC взята точка D так, что $\angle CAD = 30^0$. Из точки D на AB опущен перпендикуляр DE. Найти расстояние между серединами отрезков CE и AD, если известно, что $AC = 3\sqrt{3}$, $DB = 4$.

Составитель всех задач 10 класса К.В. Трунов.

11 класс

1. У натурального числа сумма цифр 2013. Следующее за ним имеет меньшую сумму цифр и не кратно 4. Какова сумма цифр следующего натурального числа.

2. Найдите количество всех семизначных натуральных чисел, у которых цифры в десятичной записи идут в строго возрастающем порядке до середины, а далее в строго убывающем порядке. Например, подойдет число 1358620.

3. Определите наименьшее произведение положительных чисел a и b, удовлетворяющих равенству

$$20ab = 13a + 14b.$$

4. Решите следующее уравнение для положительных x.

$$x^{2014} + 2014^{2013} = x^{2013} + 2014^{2014}.$$

5. Известно, что в пирамиде *ABCD* с вершиной *D*, сумма $\angle ABD + \angle DBC = \pi$. Найдите длину отрезка DL, где L основание биссектрисы *BL* угла $\angle ABC$, если дано, что

$$AB = 9, BC = 6, AC = 5, DB = 1.$$

Составитель всех задач 11 класса В.И. Луценко
Задача 1 составлена совместно с Р.Г. Женодаровым.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

Общие замечания по проверке:

Почти у всех задач критерии написаны на основании «приведенного» к задаче решения.

В случае «другого» решения нужно выработать другие критерии в соответствии с общими требованиями к критериям.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

5 класс

1. Ответ: 66.

Решение. За полную неделю Малыш съедает 7 конфет (каждый день по одной), а Карлсон - 2 (в воскресение) и, значит, вместе они съедают 9 конфет. Разделим 300 на 9 с остатком. Получим неполное частное 33 и в остатке 3 ($33 \cdot 9+3=300$). В последнюю неполную неделю малыш съест 3 конфеты: в среду, четверг и пятницу. Значит за 33 полных недели Карлсон съест $33 \cdot 2=66$ конфет.

Критерии проверки.

Правильный ответ без обоснований: 1 балл.

2. Ответ: 9875431.

Все числа, которые может получить Петя, семизначные. Из них в большем старшем разряде должна стоять как можно большая цифра.

Из данных цифр можно составить наибольшее возможное число: 9875431. Осталось его получить данными операциями: **1**974**8**35 → **9**74135 → 987**4**13**5** →9875**1**3**4** → →9875431. (Возможны другие цепочки преобразований).

Критерии проверки.

Правильный ответ без каких-либо пояснений: 1 балл.

Правильный ответ с указанием цепочки преобразований без объяснения, почему нельзя получить больше: 5 баллов.

Правильный ответ с объяснением, что из этих цифр нельзя составить большее число, но без цепочки преобразований: 2 балла.

3. Ответ: 1,4,5,9.

Решение. Неверным может быть одно из трёх высказываний.

1) Если неверно "В записи числа встречаются цифры 1, 4, и 5", то высказывания "В записи числа встречаются цифры 1, 5, и 9" и "В записи числа встречаются цифры 7, 8, и 9" – верны, и в записи четырёхзначного числа встречаются цифры: 1,5,7,8,9, что невозможно, так как цифр пять.

2) Если неверно "В записи числа встречаются цифры 1, 5, и 9", то высказывания "В записи числа встречаются цифры 1, 4, и 9" и "В записи числа встречаются цифры 7, 8, и 9" – верны, и в записи четырёхзначного числа встречаются цифры: 1,4,7,8,9, что невозможно, так как цифр пять.

3) Если неверно "В записи числа встречаются цифры 7, 8, и 9", то высказывания "В записи числа встречаются цифры 1, 5, и 9" и "В записи числа встречаются цифры 1, 4, и 5" – верны, и в записи четырёхзначного числа встречаются цифры: 1,4,5,9, что возможно, так как цифр четыре.

Критерии проверки.

Только правильный ответ: 1 балл.

Рассмотрен только один случай с правильным ответом: 2 балла.

Рассмотрены два случая: 3 балла.

4. Решение. Возьмем монету из стопки в 7 монет и положим в стопку из 5 монет. Получатся две стопки по 6 монет. Их и кладем на различные чашки весов. Если наступило равновесие, то искомые стопки - из 5 и 7 монет. В противном случае искомые стопки - из 6 и 19 монет.

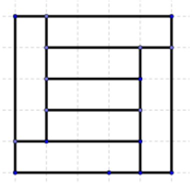
Возможны другие решения: уравнивание числа монет в любых двух стопках с нечетным количеством монет.

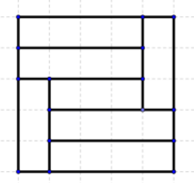
Критерии проверки.

Если верно указан способ, но не указано, в каких стопках настоящие монеты в зависимости от результата взвешивания: 4 балла.

5. Ответ: 7.

Решение. Пример:





Если прямоугольников не более 6, то они занимают не более $6 \cdot 4 = 24$ клеток, а клеток 25. Значит, прямоугольников не менее 7.

Прямоугольник, полностью расположенный в столбце, будем называть вертикальным, а полностью расположенный в строке - будем называть горизонтальным. Предположим, что нам удалось разрезать квадрат на такие прямоугольники. Рассмотрим прямоугольник, содержащий центральную клетку квадрата 5×5. Повернём, если нужно, квадрат 5×5 так, чтобы он был расположен горизонтально. Клетки этого прямоугольника расположены не менее чем в трех столбцах, в этих столбцах нет вертикальных прямоугольников. Всего возможны 10 прямоугольников: 5 вертикальных и 5 горизонтальных. Но 3 вертикальных - невозможны, значит, прямоугольников не более 10–3=7.

Прямоугольников может быть только 7.

Критерии проверки.

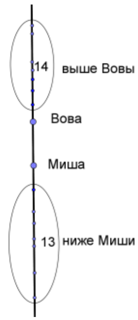
Только пример: 2 балла.

Обосновано, что прямоугольников не менее 7: 1 балл.

Показано, что прямоугольников не более 9, так как 9 займут минимум 27 клеток: 1 балл.

Сделана попытка перебора для доказательства, что прямоугольников не может быть 8: 1 балл.

6 класс



1. Ответ: таких учеников два.

Решение. Миша выше Вовы. Иначе в классе не менее 13+14+2=29.

Ниже Миши - 13 учеников, значит, выше его 25–13–1=11.

Выше Вовы 14 человек, значит, ниже его 25–14–1=10.

Значит, сосчитано 11+10+2=23 (это Миша и Вова и все, которые выше Миши и ниже Вовы). Значит осталось между ними 25–23=2 человека.

Критерии проверки.

Ответ правильный и имеется иллюстрирующий правильный рисунок (ось роста учеников), но нет обоснований: 3 балла.

2. Ответ: 100.

Решение. Пусть наибольшее число, написанное Мишей, x. Поскольку они написали одинаковое число слагаемых , то разность сумм равна $x–10=100$. $x=110$. Натуральных чисел от 11 до 110 ровно 100.

Критерии проверки.

Ответ без обоснований: 0 баллов.

3. Ответ: 2.

Решение. Периметр любого участка меньше внешнего периметра и значит узнать за один вопрос нельзя.

За два можно, если спросить у соседей левого верхнего участка.

Сумма их ответов и есть внешний периметр. Это легко обосновать, перенеся внутренние заборы участков спрошенных хозяев на внешний периметр, что возможно, поскольку в прямоугольниках противоположные стороны равны. Получим забор, идущий по внешнему периметру садового кооператива.

Критерии проверки.

Правильное указание опрашиваемых хозяев. 2 балла.

Обоснование этого: 2 балла.

Объяснение, что одного не хватит: 2 балла

4. Решение. Возьмем монету из стопки в 17 монет и положим в стопку из 15 монет. Получим две стопки по 16 монет. Их и кладем на различные чашки весов. Если наступило равновесие, то искомые стопки - из 15 и 17 монет. В противном случае искомые стопки - из 16 и 19 монет.

Возможны другие решения: уравнивание числа монет в любых двух стопках с нечетным количеством монет.

Критерии проверки.

Если верно указан способ, но не указано, в каких стопках настоящие монеты в зависимости от результата взвешивания: 4 балла.

5. Ответ 10 или 12 единиц.

Решение. В разряде единиц будут встречаться все десять цифр. Их сумма равна 45. Значит, на сумму цифр во всех старших разрядах приходится 56–45=11. Заметим, что ни одно число не может быть однозначным, так как тогда в старших разрядах (а это только десятки) сумма цифр будет не более 9, и сумма всех цифр - не более 54. Так как в старших разрядах у каждого числа сумма минимум 1, то получается ровно 9 чисел, где она точно 1. У одного числа сумма цифр в старших разрядах равна 2. Там может быть цифра 2, и тогда единиц ровно 10, или две цифры 1, и тогда единиц 12.

Примеры:

1) 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20– 10 единиц.

2) 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110 – 12 единиц.

Критерии проверки.

Есть только пример на 10 единиц: 1 балл.

Есть только пример на 12 единиц: 2 балла.

Есть только оба примера: 3 балла.

Ответ без примеров и обоснований: 0 баллов.

Утверждение, что в разряде единиц есть все цифры: 1 балл.

Утверждение, что нет однозначных чисел: 1 балл.

Утверждение, что у девяти чисел в старших разрядах 1: 1 балл.

Объяснение существования двух возможных ответов, не подтвержденное примерами: 1 балл.

7 класс

1. Ответ: Подходит число 2222232.

Критерии проверки.

Если указано это число - 7 баллов, любое другое - 0 баллов. Других ответов нет, но это не требуется обосновывать.

2. Ответ: 163°

0) Поскольку в сутках 24 часа, а полный оборот часов происходит за 12ч, то в 8 часов и 14 минут будет такой же угол, как и в 20 часов 14 минут;

1) 360°:12=30° – проходит часовая стрелка за 1ч;

2) 30°·8=240° – проходит часовая стрелка за 8ч;

3) 30°·14/60=7° – пройдёт часовая стрелка за 14 минут;

4) 240°+7°=247° – пройдёт часовая стрелка за 8 часов 14 минут;

5) 360°/ 60=6° – пройдёт минутная стрелка за 1 минуту;

6) 6°·14=84° – пройдет минутная стрелка за 14 минут;

7) 247°–84°=163° – между часовой и минутной стрелками в 20 часов 14 минут.

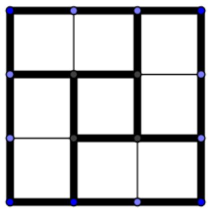
Критерии проверки.

Правильный путь вычислений и неверный ответ: 3 балла.

3. Ответ: 6.

Пример:

5	2	29
2	3	2
11	2	17



Докажем, что более быть не может. Разобьём клетки таблицы на 4 пары соседних и одну центральную. В каждой паре соседних клеток сумма чисел - простое число. Но сумма двух нечётных простых - число чётное, большее двух и, значит, составное. Значит, в каждой паре должно быть число 2. И, значит, двоек не менее четырех. Различными числами могут быть пять оставшихся и двойка, и, значит, различных не более 6.

Критерии проверки.

Указан только правильный пример: 3 балла.

Доказано, что не менее четырех двоек, 6 различных, но нет примера: 4 балла .

Можно доказать, раскрасив доску в шахматном порядке и объяснив, что на каждом цвете - числа одной чётности.

4. Ответ: 136048896.

Решение. Пусть первое число x, а второе число y. Тогда третье число xy.

Четвёртое число xy^2. Пятое число x^2y^3=108. Шестое число x^3y^5.

Произведение всех шести чисел равно $x^8y^{12}=(x^2y^3)^4=108^4=136048896$.

Критерии проверки.

Рассмотрен частный случай - ряд, в котором первое число 2, второе 3: 1 балл.

Комментарий. Подходят и другие ряды, например, ряд с первым числом (–2), а вторым 3.

Обоснованно получен ответ 108^4 , но не вычислен или вычислен неверно: 6 баллов.

5. Если у обоих игроков нет не выложенных карточек, то они выложили пар карточек поровну. Рассмотрим игрока, у которого есть не выложенные карточки. Возьмём любую из них. И пусть остаток от деления на 25 числа, написанного на такой карточке, равен r. Поскольку на карточках 300 последовательных чисел, всего на карточках чисел с таким остатком 300/25=12. Игроки выкладывают числа парами и, следовательно, есть еще не выложенная карточка с таким же остатком. У данного игрока её быть не может, иначе он объединил бы их в пару и выложил, так как их разность кратна 25. Продолжая рассматривать не выложенные карточки данного игрока, убеждаемся, что у него и другого игрока не выложено одно и тоже количество карточек. А значит, и выложили они одинаковое количество пар карточек.

Критерии проверки.

Если указано, что не выложенных карточек у игроков поровну, но не обосновано: 2 балла.

8 класс

1. Ответ: Можно.

Решение. Если гирю в 9 г положить на одну чашку, а все остальные - на другую, то разница весов на чашках 1+2+3+...+8–9=27 (г), и к гире в 9 грамм досыпаем 27 г песка до уравновешивания.

Возможны другие способы. Важно только, что на одной чашке лежит масса в 9г, возможно, набранная при помощи нескольких гирь, остальные - на другой.

Критерии проверки.

Если 27г песка отвешено за более чем одно взвешивание, то 0 баллов.

Если обоснование состоит из равенства 1+2+3+...+8–9=27 или ему подобных: 5 баллов.

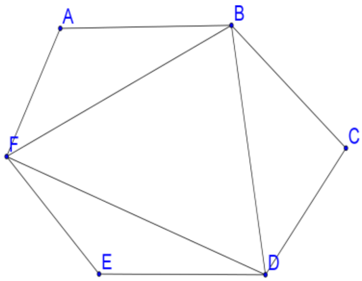
Если ответ "можно" без обоснований: 0 баллов.

2. Ответ: Может. Пример: 1670+298+45=2013. Примеров может быть много, но во всех них отсутствует цифра 3.

Критерии проверки.

Приведён пример: 7 баллов.

Если примера нет, но доказано, что отсутствовать может только цифра 3: 2 балла.



3. Ответ: Угол B - прямой.

Проведём диагонали FB, BD и DF.

Три треугольника: FAB, BCD, DEF - равны по двум сторонам и углу между ними. Из равенства треугольников следует FB=BD=DF. Значит, треугольник FBD - равносторонний и его

углы равны по 60°. Все указанные треугольники - равнобедренные, поскольку шестиугольник равносторонний, и острые углы в них равны (180°–150°)/2=15°. Значит,
$\angle B=\angle ABF+\angle FBD+\angle DBC=15°+60°+15°=90°$.

Критерии проверки.

Доказано равенство треугольников и их равнобедренность: 2 балла.

Доказано ещё, что треугольник FBD равносторонний: 3 балла.

Получен правильным вычислением ответ, но отсутствуют все указанные выше обоснования: 3 балла.

4. Ответ: 32.

Решение. Числа a, b, c, d – различные целые, поэтому числа 8–a, 8–b, 8–c и 8–d тоже целые и различные. Число 9 представляется в виде произведения четырех различных целых чисел единственным образом: $9=3\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot 1$ (с точностью до порядка множителей). Это следует из основной теоремы арифметики и различности множителей. Сумма этих множителей равна 0. Значит 8–a+ 8–b+ 8–c+ 8–d=0, отсюда $a+b+c+d=32$.

Критерии проверки.

Только ответ: 0 баллов.

5. Если у обоих игроков нет не выложенных карточек, то они выложили пар карточек поровну. Рассмотрим игрока, у которого есть не выложенные карточки. Возьмём любую из них. И пусть остаток от деления на 25 числа, написанного на такой карточке, равен r. Поскольку на карточках 500 последовательных чисел, то всего на карточках чисел с таким остатком 500/25=20. Игроки выкладывают числа парами, и следовательно, есть еще не выложенная карточка с таким остатком. У данного игрока её быть не может, иначе он объединил бы их в пару и выложил, так как их разность кратна 25. Продолжая рассматривать не выложенные карточки данного игрока, убеждаемся, что у него и другого игрока не выложено одно и то же количество карточек. А, значит, и выложили они одинаковое количество пар карточек.

Критерии проверки.

Если указано, что не выложенных карточек у игроков поровну, но не обосновано: 2 балла.

9 класс

1. Было 2013 пустых коробок. В некоторую из них положили 13 новых коробок (не вложенных друг в друга). Таким образом, стало 2026 коробок. В некоторую из них снова положили 13 новых коробок (не вложенных друг в друга) и т.д. После нескольких таких операций стало 2013 непустых коробок. Сколько всего стало коробок? Ответ: 28182.

Решение.

После каждой операции количество непустых коробок увеличивается на 1. Вначале непустых коробок не было. Значит, всего было сделано 2013 операций. За каждую операцию прибавляется 13 новых коробок. Стало
2013+13×2013=2013×14=28182.

Рекомендации по проверке.

Только ответ или вычисления без комментариев: 1 балл.

2. Докажите, что неравенство $x^2-2x\sqrt{y-5}+y^2+y-30\ge 0$ выполняется при любых допустимых значениях x и y.

Решение. ОДЗ: x – любое число, $y\ge 5$.

$$x^2-2x\sqrt{y-5}+y^2+y-30=(x-\sqrt{y-5})^2+y^2-25\ge 0,$$

так как $(x-\sqrt{y-5})^2\ge 0$ и $y^2-25\ge 0$ при $y\ge 5$.

3. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

$$x^2(y+y^2)=y^3+x^4.$$

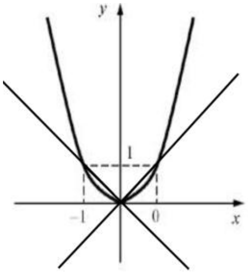
Решение.

$$x^2y+x^2y^2-y^3-x^4=0,$$

$$x^2y - x^4 + x^2y^2 - y^3 = 0,$$
$$x^2(y - x^2) + y^2(x^2 - y) = 0,$$
$$(x^2 - y^2)(y - x^2) = 0,$$
$$(x - y)(x + y)(y - x^2) = 0.$$

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому множество точек, координаты которых удовлетворяют исходному уравнению, есть объединение графиков трех уравнений:

$y = x, \quad y = -x$ и $y = x^2$.

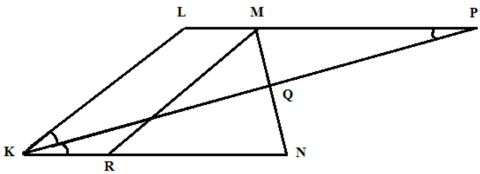


Рекомендации по проверке.

1. Получено разложение на множители: 3 балла.
2. При преобразованиях уравнения производится какое-нибудь сокращение, в результате чего теряется одна из двух прямых или парабола: 1 балл.

4. Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны соответственно 15 и 12, а основание LM=3. Биссектриса угла NKL проходит через середину стороны MN. Найдите площадь трапеции.
Ответ: 80.

Решение.



Пусть Q – середина отрезка MN. Продолжим биссектрису угла NKL до пересечения с прямой LM в точке P. $\angle NKQ = \angle QKL$.

$\angle NKQ=\angle KPL$ (накрестлежащие). Тогда $\angle QKL=\angle \mathrm{KPL}$ и ΔKPL – равнобедренный. $KL=LP$. Тогда $MP=KL-ML=12$.
$\Delta KQN=\Delta MPQ$ ($MQ=QN$, $\angle KQN=\angle MQP$, $\angle KNQ=\angle QMP$).
Тогда $KN=MP=12$.
Проведем $MR||KL$ ($R\in KN$). $MR=KL=15$, $MN=12$, $RN=KN-ML=12-3=9$, $12^2+9^2=15^2$. Значит, $\angle MNR=90^o$ и MN – высота трапеции.

$S_{KLMN}=\frac{1}{2}(KN+ML)\cdot MN=\frac{1}{2}(3+12)\cdot 12=80$.

Рекомендации по проверке.
Найдено основание KN: 4 балла.
Найдена высота трапеции: 3 балла.
Арифметическая ошибка: -1 балл.

5. В клетках таблицы с 10 строками и 10 столбцами стоят числа +1 и -1. Берутся произведения чисел, стоящих в каждом столбце и в каждой строке. Докажите, что сумма этих 20 произведений не может равняться двум.

Решение.

1 способ.

Заполним таблицу единицами, тогда сумма произведений равна 20. И будем заменять 1 на -1. Сумма при этом или уменьшается на 4, или не меняется или увеличивается на 4, так как одна клетка участвует в двух произведениях, то в сумме два слагаемых изменятся на противоположные. Например: было S_1=A+1+1, стало S_2=A–1–1 или было S_3=A+1–1, стало S_4=A–1+1 или было S_5= A–1–1, стало S_6= A+1+1. Поэтому, $S_2–S_1=–4$, $S_4–S_3=0$, $S_6–S_5=4$, и из 20 получить 2 нельзя.

2 способ.

Допустим, что сумма равна двум. Тогда среди 20 произведений 11 чисел +1 и 9 чисел -1. Пусть среди произведений по строкам x чисел +1 и y чисел -1 ($x+y=10$). Тогда среди произведений по столбцам $11-x=11-(10-y)=y+1$ чисел +1 и $9-y=9-(10-x)=x-1$ чисел -1. Тогда произведение всех чисел таблицы с одной стороны равно $(-1)^y$, а с другой стороны $(-1)^{x-1}$. Так как $x+y=10$, то числа x и y одной четности, а значит числа $x-1$ и y разной четности. Поэтому произведение всех чисел таблицы с одной стороны равно 1, а с другой стороны -1. Получили противоречие.

10 класс

1. Доказать, что в последовательности 2014, 20142014, 201420142014, ... нет такого числа, которое является квадратом целого числа.

Решение.

Число, оканчивающее на 14 при делении на 4 дает в остатке 2, но квадрат целого числа, при деление на четыре, может давать только остатки 0 или 1.

2. Сравните числа $\sqrt[2013]{2013!}$ и $\sqrt[2014]{2014!}$.

Решение.

Возведем оба числа в степень 2013×2014. Получаем, что надо сравнить числа $(2013!)^{2014} \vee (2014!)^{2013}$. Теперь разделим оба числа на $(2013!)^{2013}$. Таким образом надо сравнить $2013! \vee 2014^{2013}$, то есть $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2012 \cdot 2013 \vee \underbrace{2014 \cdot 2014 \cdot \ldots \cdot 2014}_{2013}$ Отсюда следует, что $\sqrt[2013]{2013!} < \sqrt[2014]{2014!}$.

3. На рисунке изображены графики квадратных трёхчленов

$$y = x^2 + ax + b \quad \text{и} \quad y = x^2 + cx + d.$$

Докажите, что $a^2 - c^2 > b - d$.

Решение:

Пусть x_1 и x_2 нули функции $f(x)=x^2+ax+b$, а x_3 и x_4 нули функции и $g(x)=x^2+cx+d$. Заметим, что $f(0)=b>d=g(0)>0$, а также $|x_1 - x_2| > |x_3 - x_4|$. Так как $|x_1 - x_2| = \sqrt{D_1} = \sqrt{a^2 - 4b}$ и $|x_3 - x_4| = \sqrt{D_2} = \sqrt{c^2 - 4d}$, то $\sqrt{a^2 - 4b} > \sqrt{c^2 - 4d} \Rightarrow a^2 - 4b > c^2 - 4d \Rightarrow a^2 - c^2 > 4b - 4d$, а так как b>d>0, то $4b - 4d > b - d$.

Рекомендации по проверке.

При правильном в целом решении отсутствует обоснование, что $4b - 4d > b - d$ (т.е b>d) – 5 баллов.

4. Решите неравенство в целых числах

$$\frac{x^2}{\sqrt{x - 3y + 2}} + \frac{y^2}{\sqrt{-x + 2y + 1}} \geq y^2 + 2x^2 - 2x - 1 \cdot$$

Ответ: (0;0), (2;1).
Решение.
Так как x,y целые, то $x-3y+2\geq 1$ и $-x+2y+1\geq 1$, тогда $\frac{x^2}{\sqrt{x-3y+2}}+\frac{y^2}{\sqrt{-x+2y+1}}\leq y^2+x^2 \quad\Rightarrow\quad y^2+2x^2-2x-1\leq y^2+x^2 \Leftrightarrow$ $x^2-2x-1\leq 0 \Leftrightarrow\ 1-\sqrt{2}\leq x\leq 1+\sqrt{2}$. Таким образом x может принимать значения 0, 1, 2.

a) x=0. Неравенство примет вид $\frac{0}{\sqrt{-3y+2}}+\frac{y^2}{\sqrt{2y+1}}\geq y^2-1$. Из ОДЗ следует, что $\begin{cases}-3y+2>0\\ 2y+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<\frac{2}{3}\\ y>-\frac{1}{2}\end{cases}$. Значит y=0. Подставляя в неравенство, получаем $\frac{0}{\sqrt{2}}+\frac{0}{\sqrt{1}}\geq 0-1$ верное неравенство. Следовательно (0;0) решение.

b) x=1. Неравенство примет вид $\frac{1}{\sqrt{-3y+3}}+\frac{y^2}{\sqrt{2y}}\geq y^2-1$. Из ОДЗ следует, что $\begin{cases}-3y+3>0\\ 2y>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<1\\ y>0\end{cases}$. Значит, целых y не существует.

c) x=2. Неравенство примет вид $\frac{4}{\sqrt{-3y+4}}+\frac{y^2}{\sqrt{2y-1}}\geq y^2+3$. Из ОДЗ следует, что $\begin{cases}-3y+4>0\\ 2y-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<\frac{4}{3}\\ y>\frac{1}{2}\end{cases}$. Значит, y=1. Подставляя в неравенство, получаем $\frac{4}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}}\geq 1+3$ верное неравенство. Следовательно (2;1) решение.

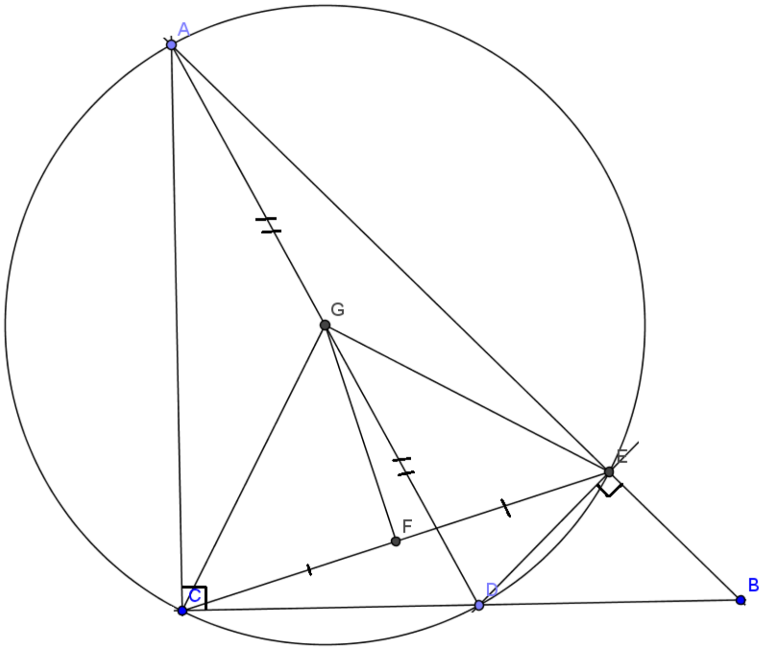
Рекомендации по проверке.
Присутствует только ответ без обоснования – 0 баллов.
Обоснованно получили, что $1-\sqrt{2}\leq x\leq 1+\sqrt{2}$ (или x=0;1;2 и только эти значения) – 4 балла.
Предыдущие написано без обоснования – 0 баллов.
При переборе значений x, получено множество значений, которые

может принимать у и без, соответствующей, проверке утверждается, что это решение – 5 баллов.

5. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C$ – прямой) на стороне BC взята точка D так, что $\angle CAD=30^0$. Из точки D на AB опущен перпендикуляр DE. Найти расстояние между серединами отрезков CE и AD, если известно, что $AC=3\sqrt{3}$, $DB=4$.

Ответ: $\dfrac{9\sqrt{57}}{38}$

Решение.



Пусть точка G середина отрезка AD, а точка F середина отрезка CE, тогда необходимо найти длину отрезка GF.

Так $\angle ACB=\angle DEA=90°$, то около четырехугольника $ACDE$ можно описать окружность, причем G – центр данной окружности (AD – диаметр). Следовательно, CG=GE=GD (как радиусы окружности), то есть ΔCGD и ΔCGE равнобедренные, а значит GF– высота в ΔCGE.

Так как $\angle CAD=30°$ – вписанный и опирается на дугу CD, а $\angle CGD$– центральный, опирающийся на ту же самую дугу, то $\angle CGD=60°$, а значит ΔCGD – равносторонний.

Пусть $\angle EAD=\alpha$, тогда $\angle ECD=\alpha$ как вписанный опирающий на ту же самую дугу DE. Тогда $\angle GCF$=60°-α, $\angle CAB$=30°+α, следовательно $\angle CBA$=90°-(30°+α)= 60°-α. Таким образом получаем, что ΔCGF и ΔABC подобны по двум углам ($\angle CBA$=$\angle GCF$=60°-α, $\angle ACB$=$\angle$GFC=90°).

Из подобия ΔCGF и ΔBAC следует, что $\frac{CG}{AB}=\frac{GF}{AC}\Rightarrow$ $GF=\frac{CG\cdot AC}{AB}=\frac{CD\cdot AC}{AB}$. Из ΔCAD получаем, что AD=2CD (так как $\angle CAD$=30°) и по теореме Пифагора CD=3 , из ΔABC по теореме Пифагора AB= $2\sqrt{19}\Rightarrow GF=\frac{3\cdot 3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}=\frac{9\sqrt{57}}{38}$

Рекомендации по проверке.
Замечено, что около четырехугольника $ACDE$ можно описать окружность, причем G – центр данной окружности –1 балл.
Если дополнительно к предыдущему вычислены стороны AB, CD , то+1 балл.

11 класс

1. У натурального числа сумма цифр 2013. Следующее за ним имеет меньшую сумму цифр и не кратно 4. Какова сумма цифр следующего натурального числа.
Ответ: 2005.
Решение. Сумма цифр у следующего числа уменьшается только в том случае, если оно оканчивается на девятку.
На две и более девяток оно оканчиваться не может, так следующее будет оканчиваться двумя нулями и будет кратно 4.
Значит, 9 заменена на 0, но цифра десятков увеличилась на 1.
Сумма цифр следующего числа 2013-9+1=2005.
Критерии проверки.
Ответ без обоснований: 0 баллов.
Не объяснено, что девятка только одна: 4 баллов.

2. Найдите количество всех семизначных натуральных чисел, у которых цифры в десятичной записи идут в строго возрастающем порядке до середины, а далее в строго убывающем порядке. Например, подойдет число 1358620.

Решение.

Если средняя цифра семизначного числа 4 (меньше не может быть), то количество искомых чисел можно получить зачеркиванием в числе 123 4 3210 одного знака правее “4”- средней цифры итогового числа. Таких чисел 4.

Если средняя цифра семизначного числа 5, то количество искомых чисел можно получить зачеркиванием в числе 1234 5 43210 одного знака левее “5”- средней цифры итогового числа и двух знаков правее. Таких вариантов $C_4^1 C_5^2 = 4 \cdot 10$.

Аналогично, если средняя цифра семизначного числа 6, то количество “подходящих” равно $C_5^2 C_6^3 = 10 \cdot 20$.

Для средней цифры 7, таких числовых вариантов будет $C_6^3 C_7^4 = 20 \cdot 35$.

Для 8 и 9, получим, соответственно, $C_7^4 C_8^5 = 35 \cdot 56$ и $C_8^5 C_9^6 = 56 \cdot 84$.

Итого 4+4·10+10·20+20·35+35·56+56·84=

=4·11+20·(10+35)+56·(84+35) =7608. Ответ: 7608.

Рекомендации по проверке.

Угадано решение: 0 баллов.

3. Определите наименьшее произведение положительных чисел a и b, удовлетворяющих равенству

$$20ab = 13a + 14b.$$

Ответ: 1,82.

Решение.

$$(20ab)^2 = (13a + 14b)^2 = (13a)^2 + (14b)^2 + 2 \cdot 13a \cdot 14b \geq$$

$$\geq 2 \cdot 13a \cdot 14b + 2 \cdot 13a \cdot 14b = 4 \cdot 13a \cdot 14b. \Rightarrow$$

$$20^2 ab \geq 4 \cdot 13 \cdot 14 \Rightarrow 20^2 ab \geq 4 \cdot 13 \cdot 14 \Rightarrow ab \geq 1{,}82.$$

Мы воспользовались неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим

$$(13a)^2 + (14b)^2 \geq 2 \cdot 13a \cdot 14b.$$

Равенство достигается, когда $13a = 14b$. Например, при $a = 1{,}4$; $b = 1{,}3$. Ответ: 1,82.

Критерии проверки.

Если ответ приведен без указания условия достижимости, то 4 балла.

4. Решите следующее уравнение для положительных x.

$$x^{2014} + 2014^{2013} = x^{2013} + 2014^{2014}.$$

Ответ: 2014.

Решение. Перепишем уравнение в следующем виде $x^{2013}(x-1) = 2014^{2013}(2014-1)$. Решением является $x = 2014$. Так как функция слева, при $x < 1$, является отрицательной, то в этом случае решений нет. При $x > 1$ данная функция возрастает, как произведение двух положительных возрастающих функций, то пересечение с постоянной функции может быть не более одного и одно уже определено.

Критерии проверки.

Угадано решение: 0 баллов.

5. Известно, что в пирамиде *ABCD* с вершиной *D*, сумма $\angle ABD + \angle DBC = \pi$. Найдите длину отрезка DL, где L основание биссектрисы *BL* треугольника ABC, если известно, что

$$AB = 9, BC = 6, AC = 5, DB = 1.$$

Ответ: 7.

Решение. Пусть точка *M* лежит на прямой, вне отрезка *BC*, за точкой *B*. Из условия следует равенство углов $\angle ABD = \angle DBM$. Тогда проекция прямой *BD* на плоскость *ABC* является биссектрисой *BK* угла *ABM*. Биссектрисы *BK* и *BL* перпендикулярны, как биссектрисы внутреннего и внешнего углов. Также, прямой *BL* перпендикулярна и высота пирамиды *DH*. Поэтому *BL* $\perp$ DBK и, следовательно, *BL* $\perp$ DB и треугольник *LBD* прямоугольный с $\angle B = \pi/2$. Аналогично, рассматривается ситуация, когда точка *M* находится за точкой *C*. Из соотношения $CL/LA = BC/BA = 2/3$ находим, что *LC*=2, *AL*=3. Так как $BL^2 = AB \cdot BC - AL \cdot LC$, то и $BL^2 = 48$. По теореме Пифагора получаем $DL^2 = DB^2 + BL^2 = 49$. Ответ: 7.

Критерии проверки.

Угадано решение: 0 баллов.

Найдена длина биссектрисы: 1 балл.

Определено, что треугольник *LBD* прямоугольный: 4 балла.

Уважаемые коллеги!

На решение задач второго этапа учащимся предоставляется:

5-6 классы – 3 астрономических часа,

7-11 классы - 4 астрономических часа. Перед началом олимпиады участникам следует разъяснить, сколько времени они пишут олимпиаду, указать, что условия задач переписывать не нужно, достаточно написать номер задачи, решение которой записывается. Следует сказать так же, что нужно приводить не только ответы, но и в обязательном порядке их обосновывать (в этом по существу и состоит решение задачи, а ответ лишь его результат). Подробность и точность решения сказывается на оценке решения задачи в баллах. Следует так же указать, что все задачи оцениваются в 7 баллов. Во время олимпиады **не разрешается пользоваться калькулятором.** Рекомендовать по окончании работы сдавать не только чистовик, но и черновик, в нем жюри может найти записи, служащие частью решения или его идеей, и каким-то образом это оценить.

Указания по проверке и оценке работ олимпиады.

Все задачи оцениваются в баллах одинаково по 7 баллов.

Критерии оценок:

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	**Полное верное решение.**
6	**Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.**
5	**Решение в целом верное. Однако решение содержит существенные ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.**
4	**Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.**
3-2	**Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.**
1	**Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения.**
0	**Решение неверное, продвижение отсутствует. Или решение отсутствует.**

Решение вопроса о том, сколько баллов снимать за допущенные недочеты или ошибки, дело жюри, важно, чтобы ко всем работам был единый подход и мнение о том, что за что ставить, вырабатывалось коллективно (это обычно называют критерии оценок по задаче). После проверки желательно провести детям показ их работ с предварительным объяснением, за что и сколько ставилось и за что и сколько снималось. Во время показа оценка за задачу может быть изменена, если выяснится, что жюри не все правильно поняло в задаче (этого не стоит бояться - не ошибается тот, кто ничего не делает), и только после показа решается вопрос о награждении и утверждается на окончательном заседании жюри.